入出力関係式と状態微分方程式との関係 (制御過程論 II)

松尾, 強

数理解析研究所講究録
90巻 1970年 13-27

入出力関係式と状態微分方程式との関係

名古屋大学　工学部　松尾　強

1. はじめに

状態空間によるシステム理論は，R. E. Kalman[1] および L. A. Zadeh and C. A. Desoer[2] により確立され，A. V. Balakrishnan[3] により無限次元状態空間系にまで拡張された。彼等の理論は，'t_0時刻以後の出力 $y(t)$ は t_0時刻以後の入力 $u(t)$ とパラメータ $x(t_0)$ により一意に表わすことができる' と仮定することから始まる。ここで，$x(t_0)$ が時刻 t_0 のシステムの状態であり，$x(t_0)$ の属する空間が状態空間である。ここから彼等は状態推移方程式と状態－出力方程式を導いた。

しかし，彼等の理論では，考慮しているシステムがあまりにも広すぎるため，状態が抽象的なものとなってしまい，それが何から構成されているかを明らかにすることができない。そこで筆者は，考察するシステムを入力と出力のみから同定することができるシステム，すなわち，出力が入力のみにより決定できるシステムに限定し，そのシステムの状態の構造がどのようなものであるかを検討する。有限次元状態空

間系はすでにその構造が究明されている[2]と考えられるから，無限次元状態空間系（分布定数系）を主に考察する。

2. 線形系の入出力方程式

ここで，線形・時間不変な因果律の成立する安定系を考える。

入力関数・出力関数は時刻 $-\infty < t < \infty$ で定義された実数値をとる関数，すなわち，一変数入力，一変数出力の連続時間関数とする。

線形時間不変系の定義

線形時間不変な安定系として次の条件の成立するシステムをいう。

i) 全ての C_0^∞（有界な台を持つ連続無限階微分可能な関数）の入力関数 φ に対し，出力関数 ψ は一意に定まり C^∞ 関数（無限階連続微分可能な関数）である。この対応を L とする。

ii) $L : C_0^\infty \to C^\infty$ は $\mathcal{D}$ から $\mathcal{E}$ への線形連続写像である。ただし，$\mathcal{D}$，$\mathcal{E}$ は C_0^∞，C^∞ に夫々 Schwartz の位相を入れたもの．

iii) L は時間移動演算子 τ_h と交換可能，すなわち，

$$L\tau_h\varphi = \tau_h L\varphi, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}, \quad \forall h\in R. \qquad (2\text{-}1)$$

ただし，$(\tau_h\varphi)(t) = \varphi(t-h)$. $\qquad (2\text{-}2)$

iv) $\varphi(t)=0,\ t<0$ ならば $(L\varphi)(t)=0\ \ t<0$ である。

注） i)の条件. 入力関数φがC_0^∞関数であれば，ある時刻$-T$が存在して$\varphi(t)=0$, $-T>t$ であるから$(-\infty, -T)$区間で入力は0である。ゆえに，$-\infty$時刻に状態$x(-\infty)$であったとしても，安定な系であれば$x(-\infty)$の影響は$-T$時刻には消滅しているであろう。それゆえ，出力ψが$x(-\infty)$に関係なく一意に定まると仮定しても妥当であろう。また，入力関数が無限階連続微分可能であるから，システム内で何回の微分操作が実行されようとも，出力ψは無限階連続微分可能であると考えられる。

ii)の条件 Lが線形であるという仮定を立てなければ，実験による入出力からのシステムの同定はほとんど不可能である。$\mathcal{D}$から$\mathcal{E}$への連続写像の仮定は，連続性の仮定としてはもっとも弱いものの一つである。入出力間に何らかの連続性の仮定を置かないかぎり，入出力からの実験によるシステムの記述は不可能であろう。

iii)の条件　これは時間不変性の仮定である。この仮定により，一つのシステムに対し同じ実験が何度も繰り返して実行できる保証がえられる。

iv)の条件　因果律の条件であり，我々が考えるシステムであるかぎり当然である。

定理１（Schwartzの核定理）[4)]

i)〜iv)の条件を満すLに対し，一つの超関数 $K \in \mathcal{D}'_+$ が存在し

$$L\varphi = K * \varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \qquad (2\text{-}3)$$

ただし，$(K*\varphi)(t) = K_{[s]}(\varphi(t-s))$. (2-4)

逆に，全ての $K \in \mathcal{D}'_+$ に対し，条件 i)〜iv)が成立する。

Kをシステムの超関数という。

この定理により我々が考察するシステムの入出力方程式が $\psi = K * \varphi$ であることがわかった．しかし，我々が取扱う入力関数は C_0^∞ 関数ばかりではない。それゆえ，Lの定義域を拡張しなければならない。

定理2

$T \rightsquigarrow K*T$ は $\mathcal{E}'$ から $\mathcal{D}'$ への線形連続写像である。ただし，$\mathcal{E}'$，$\mathcal{D}'$ はおのおの $\mathcal{E}$，$\mathcal{D}$ の共役空間である。

註）C_0^∞ 関数を超関数と考えれば $\mathcal{E}'$ に属し，C^∞ 関数を超関数と考えれば $\mathcal{D}'$ に属するから，定理2により，$K*$ の定義域が有界な台を持つ超関数の空間にまで拡張されたことになる。

ここで，線形時間不変系の定義に次の条件 v)を追加する。

v) $supp(\varphi) \subset (-\infty, 0)$ ならば，$\lim_{t \to \infty}(L\varphi)(t)$ が存在し，0である。

注）これは，線形時間不変系の定義の注）より明らかであろう。

3. 許容入力関数空間とシステムの分類

入力関数空間としては，$\mathcal{D}$はステップ関数さえも含まれていないから狭すぎる。$\mathcal{E}'$は有界な台を持つ超関数の空間であるから充分に広いのであるが，出力が超関数となってしまい，各時刻での出力が測定できない。そこで，入力関数空間として考えてもよい空間を許容入力関数空間とし，どのような許容入力関数空間ならば出力が関数になってくれるかの条件を考察する。

許容入力関数空間の定義[5]

入力関数空間 $U(-\infty,\infty)$ が次の条件を満せば，許容入力関数空間であるという。

i) $U(-\infty,\infty)\supset\mathcal{D}$

ii) 線形空間

iii) $f\in U(-\infty,\infty)$ ならば，任意の実数 h に対し

$$\tau_h f\in U(-\infty,\infty)$$

iv) $f, g\in U(-\infty,\infty)$ ならば，任意の実数 s に対し

$$f|_s g\in U(-\infty,\infty)$$

ただし

$$(f|_s g)(t)=\begin{cases} f(t), & t<s \\ g(t), & t\geq s \end{cases} \qquad (3\text{-}1)$$

注). 条件 i)は定理1が成立するための要請。条件 ii) は線形系を考えるから。条件 iii) は時間不変系を考えるから，入力 f の時間移動した入力も考慮するため。条件 iv) は任意の時間に入力関数を切換えることができるようにするため。この条件により時間区間 [a, b) の特性関数が入力関数として許される。

$C_0^\infty(-\infty,\infty)$ で生成される許容入力関数空間を $\overline{C_0^\infty}(-\infty,\infty)$ とすれば，$\overline{C_0^\infty}(-\infty,\infty)$ は区間的に無限階連続微分可能な関数の集合である。$L^p(-\infty,\infty)$，$(1 \leq p \leq \infty)$ は許容入力関数空間となる。

これから我々は出力関数空間 $Y(-\infty,\infty)$ として有界可測関数の集合 $B(-\infty,\infty)$ の部分空間を考えることにする。

$B(-\infty,\infty)$ はノルムを

$$\| y \| = \sup_t |y(t)| \qquad (3-2)$$

とすれば Banach 空間である。

ここで，出力関数が $B(-\infty,\infty)$ に属するような許容入力関数空間に L の定義域を拡張したいのであるが，そのためには，システム超関数 K の性質が重要である。そこで，システムの分類を行なう。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "i_v"] & \mathrm{Im}\,L \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_r"] & \mathcal{E} \\
V(-\infty,\infty) \arrow[r, "L"] & B(-\infty,\infty) &
\end{tikzcd}$$

図 1

<u>システムの分類</u>

i) システム超関数Kが singular distributions ならばシステムは improper であるという。

ii) システム超関数Kが L^{∞} (essentially bounded) に属すれば、システムは弱安定であるという。

iii) システム超関数Kが L^{2} に属すれば、システムはエネルギー安定であるという。

iv) システム超関数Kが L^{1} に属すれば、システムは安定であるという。

v) システム超関数Kが S (rapidly decreasing function) に属すれば、システムは強安定であるという。

vi) システム超関数Kが有界な台を持てば、システムは有限時間記憶系であるという。

<u>定理3</u>

i) システムが弱安定であれば、$L^{1}(-\infty,\infty)$ は許容入力関数空間である。

ii) システムがエネルギー安定であれば、$L^{2}(-\infty,\infty)$ は

許容入力関数空間である。

iii) システムが安定であれば，$L^{\infty}(-\infty,\infty)$ は許容入力関数空間である。

iv) システムが強安定であれば，S'(slowly increasing function) に属する関数の空間は許容入力関数空間である。

v) システムが有限記憶系であれば，regular distribution の関数は許容入力関数空間である.

4 状態空間

入力関数により出力関数が完全に記述できるシステムにおいては，t時刻の状態 $x(t)$ は，t時刻以前の入力のt時刻以後の出力に影響を与える成分の要約である。云い換えれば，過去の入力の将来の出力へ伝達される情報が状態である。ゆえに，状態空間の次元数が高いことは，過去から将来への情報の伝達量が多いことになる。

入力関数 $u\in U(-\infty,\infty)$ は許容入力関数空間の定義により

$$u = u|_t 0 + 0|_t u \qquad (4\text{-}1)$$

と表わすことができる。この入力による出力は

$$Lu = L(u|_t 0 + 0|_t u) = L(u|_t 0) + L(0|_t u) = k*(u|_t 0) + k*(0|_t u) \qquad (4\text{-}2)$$

である. $L(u|_t 0)$ がt時刻以前の入力による応答であり，t時刻以後の出力 $t|(L(u|_t 0))$ が状態 $x(t)$ による応答と

考えられる。$L(0|_t u)$ は t 時刻以後の入力による応答であり，因果律により，$(L(0|_t u))(\tau)=0$, $\tau<t$ である．ここで，我々は

$$P(t)x(t) = {}_t|(L(u|_t 0)) \qquad (4-3)$$

となる $P(t)$, $x(t)$ および $x(t)$ の属する状態空間 Σ を定めたい。(4−3) 式が状態−出力方程式である。もちろん，状態 $x(t)$ は入力 $(u|_t 0)$ から誘導されるべきものである。

ここで

$$U(-\infty, 0) = \{u \in U(-\infty, \infty) : u(\tau)=0 \quad \tau \geq t\}$$
$$(4-4)$$

とすれば，$U(-\infty, 0)$ は t 時刻の状態空間の一つの候補である。出力関数空間を $Y(-\infty, \infty)$ とし，出力 $y(t)$ の変域を (t, ∞) に縮少してできた関数を ${}_t|y$ とし，${}_t|y$ の集合を $Y(t, \infty)$ とする。$u(-\infty, t)$ から $Y(t, \infty)$ への写像は別図により

$$\varphi_t L j_t (u|_t 0) = L_t(u|_t 0) \qquad (4-5)$$

となる。ここで，

$$\mathrm{Ker}(L_t) = \{u \in U(-\infty, t) : L_t = 0\} \qquad (4-6)$$

を考えれば，$\mathrm{Ker}(L_t)$ に属する入力関数は t 時刻以後の出力に影響を与えない。ゆえに，$U(-\infty, t)$ の中で部分空間 $\mathrm{Ker}(L_t)$ の成分は状態空間としての資格がない。そこで，

t時刻の既約状態空間の候補として

$$\Sigma_t = U(-\infty, t)/\mathrm{Ker}(L_t) \qquad (4\text{-}7)$$

とするのが自然である。

$$\begin{tikzcd}
U(-\infty, \infty) \arrow[r, "L"] & Y(-\infty, \infty) \arrow[d, "\varphi_t"] \\
U(-\infty, t) \arrow[u, "j_t"] \arrow[r, "L_t"] \arrow[d] & Y(t, \infty) \\
\Sigma_t = U(-\infty, t)/\mathrm{Ker}(L_t) \arrow[r] & \mathrm{Im}(L_t) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

図 2

<u>補題 1</u>

$$\left.\begin{aligned}
&\tau_{-t}(U(-\infty, t)) = U(-\infty, t) \\
&\tau_{-t}(\mathrm{Ker}(L_t)) = \mathrm{Ker}\, L_0 \\
&\tau_{-t}(\Sigma_t) = \Sigma_0
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}8)$$

ここで，$\tau_{-t} = \tau_t^{-1}$ で bijection である。

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_0 \arrow[r, "\tau_t"] \arrow[d, "L_0"] & \Sigma_t \arrow[d, "L_t"] \\
Y(0, \infty) \arrow[r, "\tau(t, 0)"'] & Y(t, \infty)
\end{tikzcd}$$

図 3

補題2

$$\mathrm{Ker}\,(L_0) = \{\tau_t \check{K},\ \ t>0\}^{\circ} \qquad (4-9)$$

補題1より，各時刻の状態空間の候補は全て同型である。ゆえに，状態空間としてΣ_0と固定して考えるべきであろう。状態空間Σ_0からt時刻以後の出力空間$Y(t,\infty)$への状態一出力方程式は，上図より

$$_t|y = T(t,0)\,L_0 x(t) \qquad (4-10)$$

となる。ただし，$T(t,0)$は$Y(0,\infty)$から$Y(t,\infty)$への線形写像であり

$$(T(t,0)\,y)(\tau) = y(\tau-t),\ \forall\tau>t \qquad (4-11)$$

である。システムの状態空間はΣ_0と同型な空間であればどれでもよい。状態空間をΣ，ΣからΣ_0への同型写像をQとすれば，状態空間Σから出力空間$Y(t,\infty)$への状態一出力方程式は

$$\left.\begin{aligned} &_t|y = T(t,0)\,L_0 Q\,\tilde{x}(t) \\ &_t|y = P(t)\,\tilde{x}(t) \qquad P(t)=T(t,0)\,L_0 Q \end{aligned}\right\} \qquad (4-12)$$

となる。

$$\Sigma \xrightarrow{\ Q\ } \Sigma_0$$

図 4

5. 状態推移方程式

入力 $u_1 \in U(-\infty, 0)$ による0時刻以後の応答 ${}_0|L(u_1)$ は，(4-12) 式より

$$P(0)x(0) = {}_0|L(u_1) \qquad (5-1)$$

である。t時刻以後の応答 ${}_t|L(u_1)$ は，同様に

$$P(t)x(t) = {}_t|L(u_1) = {}_t|(P(0)x(0)), \quad t \geq 0 \qquad (5-2)$$

$$\begin{tikzcd}
Y(0,\infty) \arrow[rr, "Se(t)"] \arrow[dr, "{}_t|"'] & & Y(0,\infty) \arrow[dl, "{T(0,t)}"] \\
& Y(t,\infty) &
\end{tikzcd}$$

図 5

となる。ここで，

$$ {}_t|y = T(0,t)\ Se(t)({}_0|y) \qquad (5-3)$$

$$Se(t) : Y(0,\infty) \longrightarrow Y(0,\infty),\ (Se(t)({}_0|y))(\tau) = y(\tau + t),$$
$$\tau > 0 \qquad (5-4)$$

であるから，(5-2) 式は，(4-12), (5-3) 式から

$$T(t,0)\, L_0 Q\, x(t) = T(0,t)\, Se(t)\, L_0 Q\, x(0)$$

$$x(t) = Q^{-1} L_0^{-1}\, Se(t)\, L_0 Q\, x(0) \qquad (5-5)$$

となる。ここで，$T(0,t) = T^{-1}(t,0)$ という関係を利用した。(5-5)式を

$$x(t) = T(t)\, x(0) \qquad (5-6)$$

$$T(t) = Q^{-1} L_0^{-1}\, Se(t)\, L_0 Q \qquad (5-7)$$

とし，(5−6)式を入力のない状態推移方程式，$T(t)$を推移半群という。もちろん，

$$T(t+s)=T(t)T(s) \quad t,\ s \geq 0 \qquad (5-8)$$

が成立する。

今度は入力 u_2，$u_2(\tau)=0$，$\tau \leq 0$，$\tau > t$ による出力の t 時刻以後の応答 ${}_t|L(u_2)$ を考察する。前と同様に，この応答が状態 $x(t)$ により発生したと考えれば

$$P(t)x(t)={}_t|L(u_2) \qquad (5-9)$$

となる。ゆえに

$$x(t)=Q^{-1}L_0^{-1}Se(t)L(u_2)=T(t)Q^{-1}L_0^{-1}L(u_2) \quad (5-10)$$

となる。(5−10)式が $(0,t)$ 間の入力と状態との関係式である。ゆえに，入力 $u=u_1|_0u_2|_t0$ に対しては，線形性により

$$x(t)=T(t)(x(0)+Q^{-1}L_0^{-1}L(u_2))$$

$$x(t)=T(t)(x(0)+Q^{-1}L_0^{-1}L(0|_0u|_t0)) \qquad (5-11)$$

となる。これが状態推移方程式である。

出力空間 $Y(-\infty,\infty)$ に $B(-\infty,\infty)$ の位相を入れ，状態空間 Σ に，Q，L_0 等が連続写像となるような一番弱い位相を入れれば，Σ が局所凸な線形位相空間となり，$T(t)$ が解析半群となり，生成作用素

$$Ax=\lim_{h\to 0}\frac{T_hx-x}{h} \qquad (5-12)$$

が存在する．また，Lの定義域にδ関数を含めば，状態推移式（5-11）が微分でき

$$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+Bu(t) \qquad (5\text{-}13)$$

$$B=Q^{-1}L_0^{-1}L \qquad (5\text{-}14)$$

がえられる。これが状態微分式であり，ダイナミカル・システムを表わす式である．

6. 終りに

以上，線形時間不変系に対する状態空間および状態推移式を主に代数的立場から考察した。定理3で各システムに対する許容入力関数空間を見出したが，システム超関数Kが与えられ，そのシステムに対する最大の許容入力関数空間が何になるかという問題は重要であるが，それは個々のKに対して検討しなければならない。状態空間Σ_0は$U(-\infty,0)/\ker(L_0)$という商空間であり，抽象的な空間である。これを具体的空間Σで表現してはじめて我々が検討しやすい状態推移式が与えられる。このためには，同型変換Qをラプラス変換，フーリエ変換等の変換を利用すればよい。しかし，どの変換を利用すればよいかは，個々のシステムにより変ってくる。

参考文献

1) R.E. Kalman "Mathematical description of linear dynamical systems" J. of S.I.A.M. Control, Vol.1, No.2. 1963.

2) L.A. Zadeh and C.A. Desoer "Linear system theory" Macgraw-Hill, 1963.

3) A.V. Balakrishnan "Foundation of the state space theory of continuous systems 1" J. of Computer and System Sciences, Vol.1, 1967.

4) K. Yosida "Functional Analysis" Springer-Verlag, 1965.

5) A. Wayne Wymore "Mathematical theory of systems engineering: The elements" Wiley and Sons. 1967

6) F. Treves "Locally convex spaces and linear partial differential equations" Springer-Verlag, 1967

7) T. Matsuo "Mathematical theory of linear continuous time systems" Res. Rept. of Auto. Cont. Lab., Nagoya Univ. Vol. 16, 1969.